Matemáticas Financieras y Cálculo Actuarial (VER.4.10)

Compendio de fórmulas elaborado por
Jesús Rubí Miranda (jesusrubim@yahoo.com)
http://www.geocities.com/calculusjrm/

DEPRECIACIÓN

Def. ***Depreciación*** *es la pérdida de valor de un activo físico (edificios, maquinaria, etc.), como consecuencia del uso.*

Para prevenir la necesidad de reemplazo de un determinado activo al fin de su vida útil, cada año se traspasa una parte de las utilidades de una empresa a un fondo especial llamado *fondo para depreciación*. A los depósitos anuales en el fondo para depreciación se les conoce como *cargos por depreciación*. En un momento determinado, a la diferencia entre el costo original del activo y el importe del fondo para depreciación se le conoce como *valor en libros*. El valor en libros de un activo al fin de su vida útil debe ser su *valor de salvamento*.

Utilizaremos la notación: D para el cargo por depreciación, C para el costo original del activo, S para el valor de salvamento, n el número de años de vida útil de activo, $t=\overline{1,n}$ el fin de cierto periodo (año).

Tenemos estos métodos para depreciar.

- Método de promedio o método lineal,
- Método de porcentaje fijo,
- Por fondo de amortización.

En el *método de promedios* o *método lineal* se efectúan depósitos anuales iguales en el fondo para depreciación, durante toda la vida útil del activo.

El cargo por depreciación es $D_t = D = \dfrac{C-S}{n}$;

$\text{DeprecTotal}_t = t\cdot D$,

$\text{ValorEnLibros}_t = C - t\cdot D$.

Y los cargos quedan distribuidos así:

Año de uso	Cargo por depreciación	Depreciación total	Valor en Libros
0	$0\cdot D$	$0\cdot D$	$C-0\cdot D=C$
1	D	D	$C-D$
2	D	$2D$	$C-2D$
3	D	$3D$	$C-3D$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	D	$n\cdot D$	$S=C-n\cdot D$
Total	$n\cdot D$		

El *método de porcentaje fijo* supone que el cargo por depreciación que debe hacerse al final de cada año es un porcentaje fijo del valor contable al principio del año.

Denotemos d al porcentaje fijo anual. Al final del primer año, el cargo por depreciación es Cd y el valor contable es $C-Cd=C(1-d)$. Al final del segundo año, el cargo por depreciación es $C(1-d)d$ y el valor contable es $C(1-d)^2$. Los valores contables sucesivos, durante la vida del activo, corresponden a los términos de la progresión geométrica

$$C(1-d),C(1-d)^2,C(1-d)^3,\ldots$$

Por tanto, al final de n años, el valor contable es

$$C(1-d)^n = S$$

El valor d , la *tasa de depreciación*, puede ser un valor estimado o puede ser determinado de la relación dada por la ecuación anterior. Los cargos quedan distribuidos así:

Año de uso	Cargo por depreciación	Depreciación total	Valor en Libros
1	$D_1=Cd$	D_1	$S_1=C(1-d)$
2	$D_2=C(1-d)d$	D_1+D_2	$S_2=C(1-d)^2$
3	$D_3=S_2d$	$\sum_{t=1}^{3}D_t$	$C(1-d)^3$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	$D_n=C(1-d)^{n-1}d$	$\sum_{t=1}^{n}D_t$	$S=S_n=C(1-d)^n$
Total	$C-C(1-d)^n$		

SERIES

Progresión Aritmética

Una progresión aritmética

$$a,a+d,a+2d,\ldots,a+(n-2)d,a+(n-1)d$$

tiene primer elemento a , y último $l=a+(n-1)d$. Y la suma de estos términos es:

$$s_n=\sum_{i=0}^{n-1}[a+id]=\frac{n}{2}(a+l)$$
$$=\frac{n}{2}[2a+(n-1)d]$$

Progresión Geométrica

Una progresión geométrica

$$a,ar,ar^2,ar^3,\ldots,ar^{n-2},ar^{n-1}$$

tiene primer elemento a , y último $l=ar^{n-1}$. Y la suma de estos términos es:

$$s_n=\sum_{i=0}^{n-1}ar^i=a\cdot\frac{1-r^n}{1-r}$$
$$=\frac{a-rl}{1-r}$$

Serie de Maclauren

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^k(0)}{k!}\cdot x^k$$

Teorema del Binomio

$$(x+y)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}y^k$$

INTERÉS

Interés Simple

Def. *El* ***interés*** *es la cantidad pagada por el uso del dinero obtenido en préstamo o la cantidad producida por la inversión del capital.*

Def. *Cuando únicamente el capital gana intereses por todo el tiempo que dura la transacción, el interés vencido al final del plazo se le conoce como* ***interés simple****.*

El interés simple está dado por

$$I=C\cdot i\cdot t$$

y el monto dado por

$$S=C+I=C+C\cdot i\cdot t=C\cdot(1+i\cdot t)$$

El interés simple se clasifica en dos:

Def. *El* ***Interés Simple Exacto*** *es aquél que se calcula sobre una base de 365 días, 366 años bisiestos.*

Def. *El* ***Interés Simple Ordinario*** *es aquél que se calcula sobre una base de 360 días.*

Este último aumenta el interés cobrado por el acreedor. Las fórmulas:

$$I_e=C\cdot i\cdot\frac{\text{días}}{365}\quad\&\quad I_o=C\cdot i\cdot\frac{\text{días}}{360}$$

Def. *Un* ***pagaré*** *es una promesa escrita de pago de una determinada cantidad de dinero, con intereses o sin ellos, en una fecha dada, suscrita por un deudor a favor de un acreedor.*

En un pagaré intervienen los siguientes elementos:

- Plazo.
- Valor nominal,
- Fecha de vencimiento,
- Valor de vencimiento.

Si en el pagaré no se estipula intereses, entonces el valor nominal es igual al valor al vencimiento.

Def. *El valor de una deuda, en una fecha anterior a la de su vencimiento se le conoce como* ***valor presente*** *de la deuda en dicha fecha.*

De $S=C\cdot(1+i\cdot t)$, tenemos

$$C=\frac{S}{1+i\cdot t}$$

Descuento Bancario

El descuento bancario está dado por

$$D=S\cdot d\cdot t$$

y

$$C=S-D=S-S\cdot d\cdot t=S\cdot(1-d\cdot t)$$

y las equivalencias entre tasa de descuento e interés están dadas por

$$i=\frac{d}{1-d\cdot t}\quad\&\quad d=\frac{i}{1+i\cdot t}$$

El descuento en cadena o serie cumple

$$1-d=(1-d_1)\cdot(1-d_2)\cdots(1-d_n)$$

Interés Compuesto

Para un capital C , una tasa de interés efectiva i , y n años de capitalización, tenemos un valor acumulado

$$S=C\cdot(1+i)^n$$
$$=C\cdot\left(1+\frac{i^{(m)}}{m}\right)^{m\cdot n}$$
$$=C\cdot e^{\delta\cdot n}$$

Utilizamos $i^{(m)}$, cuando hablamos de interés nominal convertible m veces al año. Y usamos $\delta=\ln(1+i)$, cuando hablamos de fuerza de interés (tasa continua de crecimiento).

También se define

$$i'=\frac{i^{(m)}}{m}$$

Algunas relaciones

La tasa de interés equivalente a la tasa de descuento es:

$$i=\frac{d}{1-d}$$

Y la tasa de descuento equivalente a una tasa de interés es:

$$d=\frac{i}{1+i}$$

También tenemos:

$$1-d=v$$

Para traer a valor presente utilizamos

$$(1+i)^{-n}=\left(1+\frac{i^{(m)}}{m}\right)^{-m\cdot n}=e^{-\delta\cdot n}$$

También para valor presente se tiene

$$(1-d)^n=\left(1-\frac{d^{(m)}}{m}\right)^{m\cdot n}=e^{-\delta\cdot n}=(1+i)^{-n}$$

y para monto

$$(1-d)^{-n}=\left(1-\frac{d^{(m)}}{m}\right)^{-m\cdot n}=e^{\delta\cdot n}=(1+i)^n$$

Una tasa de descuento efectiva equivalente a una nominal cumple

$$(1-d)=\left(1-\frac{d^{(m)}}{m}\right)^m$$

ANUALIDADES

Def. *Una* ***anualidad*** *es una serie de pagos iguales efectuados a intervalos de tiempo.*

Def. *Una* ***anualidad contingente*** *es aquella en la cual el plazo depende de algún suceso cuya realización no puede fijarse.*

Def. *Una* ***anualidad cierta ordinaria*** *es aquella en la cual los pagos son efectuados al final de cada intervalo de pago, es decir, que el primer pago se hace al final del primer intervalo de pago, el segundo al final del segundo intervalo de pago y, así sucesivamente.*

Las fórmulas:

$$S=R\cdot s_{\overline{n}|}=R\cdot\sum_{i=0}^{n-1}(1+i)^k=R\cdot\frac{(1+i)^n-1}{i}$$

y

$$A=R\cdot a_{\overline{n}|}=R\cdot\sum_{k=1}^{n}v^k=R\cdot\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}=\frac{1-v^n}{i}$$

De lo anterior se tiene la relación

$$s_{\overline{n}|}=a_{\overline{n}|}\cdot(1+i)^n\quad\therefore\quad a_{\overline{n}|}=s_{\overline{n}|}\cdot v^n$$

También se tiene

$$s_{\overline{h+k}|}=s_{\overline{h}|}+(1+i)^h s_{\overline{k}|}\ \&$$
$$a_{\overline{h+k}|}=a_{\overline{h}|}+(1+i)^{-h}a_{\overline{k}|}$$

Def. *Una* ***anualidad anticipada*** *es una anualidad cuyo pago periódico vence al principio del intervalo de pago.*

Su valor presente es:

$$\ddot{a}_{\overline{n}|}=1+v+v^2+\cdots+v^{n-1}$$
$$=\sum_{k=0}^{n-1}v^k$$
$$=a_{\overline{n}|}\cdot(1+i)$$
$$=a_{\overline{n-1}|}+1$$

y su valor acumulado:

$$\ddot{s}_{\overline{n}|}=(1+i)+(1+i)^2+(1+i)^3+\cdots+(1+i)^n$$
$$=\sum_{k=1}^{n}(1+i)^k$$
$$=s_{\overline{n}|}\cdot(1+i)$$
$$=s_{\overline{n+1}|}-1$$

De lo anterior se tiene la relación

$$\ddot{s}_{\overline{n}|}=\ddot{a}_{\overline{n}|}\cdot(1+i)^n\quad\&\quad\ddot{a}_{\overline{n}|}=\ddot{s}_{\overline{n}|}\cdot v^n$$

Def. *Una* ***anualidad diferida*** *es aquella cuyo primer pago se hace algún tiempo después del término del primer periodo de interés.*

Su valor presente es

$${}_{m|}a_{\overline{n}|}=v^{m+1}+v^{m+2}+\cdots+v^{m+n}$$
$$=v^m\cdot(v+v^2+\cdots+v^n)$$
$$=v^m\cdot a_{\overline{n}|}$$
$$=a_{\overline{m+n}|}-a_{\overline{m}|}$$

Si los pagos son anticipados tenemos:

$${}_{m|}\ddot{a}_{\overline{n}|}=v^m\cdot\ddot{a}_{\overline{n}|}$$

Def. *Una* ***perpetuidad*** *es una anualidad cuyo pago se inicia en una fecha fija y continua por siempre.*

El valor presente de una perpetuidad es:

$$a_{\overline{\infty}|}=\frac{1}{i}$$

si la renta anual es R , se tiene:

$$A=R\cdot\frac{1}{i}=\frac{R}{i}$$

Análogamente

$$\ddot{a}_{\overline{\infty}|}=1+v+v^2+\cdots=\frac{1}{1-v}=\frac{1}{d}$$

Depreciación por fondo de amortización

Depreciación por fondo de amortización					
AñoDe Pago	PagoAl Fondo	%AlFondo Acumulado	Depreciación Anual	Fondo Acumulado	ValorEn Libros
0	$D=\frac{C-S}{S_{\overline{n}\vert}}\cdot 0$	0	0	0	C
1	$D=\frac{C-S}{S_{\overline{n}\vert}}$	0	$D\cdot s_{\overline{1}\vert}-0$	$D\cdot s_{\overline{1}\vert}$	$C-D\cdot s_{\overline{1}\vert}$
2	$D=\frac{C-S}{S_{\overline{n}\vert}}$	$D\cdot s_{\overline{1}\vert}\cdot i$	$D\cdot s_{\overline{2}\vert}-D\cdot s_{\overline{1}\vert}$	$D\cdot s_{\overline{2}\vert}$	$C-D\cdot s_{\overline{2}\vert}$
3	$D=\frac{C-S}{S_{\overline{n}\vert}}$	$D\cdot s_{\overline{2}\vert}\cdot i$	$D\cdot s_{\overline{3}\vert}-D\cdot s_{\overline{2}\vert}$	$D\cdot s_{\overline{3}\vert}$	$C-D\cdot s_{\overline{3}\vert}$
t	$D=\frac{C-S}{S_{\overline{n}\vert}}$	$D\cdot s_{\overline{t-1}\vert}\cdot i$	$D\cdot s_{\overline{t}\vert}-D\cdot s_{\overline{t-1}\vert}$ $=D\cdot(1+i)^{t-1}$	$D\cdot s_{\overline{t}\vert}$	$C-D\cdot s_{\overline{t}\vert}$
$n-1$	$D=\frac{C-S}{S_{\overline{n}\vert}}$	$D\cdot s_{\overline{n-2}\vert}\cdot i$	$D\cdot s_{\overline{n-1}\vert}-D\cdot s_{\overline{n-2}\vert}$	$D\cdot s_{\overline{n-1}\vert}$	$C-D\cdot s_{\overline{n-1}\vert}$
n	$D=\frac{C-S}{S_{\overline{n}\vert}}$	$D\cdot s_{\overline{n-1}\vert}\cdot i$	$D\cdot s_{\overline{n}\vert}-D\cdot s_{\overline{n-1}\vert}$	$D\cdot s_{\overline{n}\vert}$	$C-D\cdot s_{\overline{n}\vert}=S$
Total	nD	$D\cdot\left(s_{\overline{n}\vert}-n\right)$	$Ds_{\overline{n}\vert}$	-	-

MÁS ANUALIDADES

Def. Una anualidad creciente es aquella cuyos pagos son los siguientes:

$$P, P+Q, P+2Q, \ldots, P+(n-1)Q.$$

Tenemos:

$$X=Pv+(P+Q)v^2+(P+2Q)v^3+\cdots+\left[P+(n-1)Q\right]v^n$$
$$=P\cdot a_{\overline{n}|}+Q\cdot\frac{a_{\overline{n}|}-nv^n}{i}$$

Si $P=Q=1$, se llega a la anualidad creciente ordinaria, que se simboliza $(Ia)_{\overline{n}|}$,

$$(Ia)_{\overline{n}|}=\frac{\ddot{a}_{\overline{n}|}-nv^n}{i}$$

El monto de esta anualidad creciente ordinaria es:

$$(IS)_{\overline{n}|}=(Ia)_{\overline{n}|}\cdot(1+i)^n$$
$$=\frac{1-v^n+a_{\overline{n}|}-nv^n}{i}(1+i)^n$$
$$=\frac{(1+i)^n-1+s_{\overline{n}|}-n}{i}$$
$$=\frac{\ddot{s}_{\overline{n}|}-n}{i}$$
$$=\frac{s_{\overline{n+1}|}-(n+1)}{i}$$

Haciendo $P=n$ y $Q=-1$, se llega a la anualidad decreciente y el valor presente es:

$$(Da)_{\overline{n}|}=na_{\overline{n}|}-\frac{a_{\overline{n}|}-nv^n}{i}$$
$$=\frac{n-nv^n-a_{\overline{n}|}+nv^n}{i}$$
$$=\frac{n-a_{\overline{n}|}}{i}$$

El monto de esta anualidad es igual a:

$$(DS)_{\overline{n}|}=(Da)_{\overline{n}|}\cdot(1+i)^n$$
$$=\frac{n\cdot(1+i)^n-s_{\overline{n}|}}{i}$$

Anualidades pagaderas p veces al año

En las anualidades pagaderas p veces al año, con un renta anual igual a la unidad, denotamos su valor presente como $a_{\overline{n}|}^{(p)}$.

El valor presente de dicha anualidad cuyo pago periódico es igual a $1/p$ es inmediata, es:

$$a_{\overline{n}|}^{(p)}=\frac{1}{p}v^{1/p}+\frac{1}{p}v^{2/p}+\cdots+\frac{1}{p}v^n$$
$$=\frac{1}{p}v^{1/p}\cdot\left(1+v^{1/p}+\cdots+v^{n-1/p}\right)$$
$$=\frac{1}{p}v^{1/p}\left\{\frac{1-v^n}{1-v^{1/p}}\right\}$$
$$=\frac{1}{p}v^{1/p}(1+i)^{1/p}\left\{\frac{1-v^n}{(1+i)^{1/p}-1}\right\}$$
$$=\frac{1}{p}\frac{1-v^n}{\left[(1+i)^{1/p}-1\right]}$$
$$=\frac{1-v^n}{i^{(p)}}$$
$$\therefore\ a_{\overline{n}|}^{(p)}=\frac{i}{i^{(p)}}a_{\overline{n}|}$$

Vemos que $\frac{i}{i^{(p)}}$ es el pago equivalente a los p pagos efectuados durante el año.

Obviamente, el monto de una anualidad de tal tipo es:

$$s_{\overline{n}|}^{(p)}=\frac{i}{i^{(p)}}s_{\overline{n}|}$$

Anualidades anticipadas

Se paga $1/p$ al principio de cada p-ésimo período de conversión:

$$\ddot{a}_{\overline{n}|}^{(p)}=\frac{1}{p}\left[1+v^{1/p}+v^{2/p}+\cdots+v^{n-1/p}\right]$$
$$=\frac{1}{p}\left[\frac{1-v^n}{1-v^{1/p}}\right]$$
$$=\frac{1-v^n}{d^{(p)}}$$
$$=\frac{i}{d^{(p)}}a_{\overline{n}|}$$

ya que:

$$\left(1-\frac{d^{(p)}}{p}\right)^{-p}=(1+i)$$
$$\therefore\ d^{(p)}=p\left(1-v^{1/p}\right)$$

Y

$$\ddot{S}_{\overline{n}|}^{(p)}=\frac{1}{p}\left[(1+i)^n+(1+i)^{n-1/p}+\cdots+(1+i)^{1/p}\right]$$
$$=\frac{1}{p}\left[\frac{(1+i)^n-1}{1-(1+i)^{-1/p}}\right]$$
$$=\frac{1}{p}\left[\frac{(1+i)^n-1}{1-v^{1/p}}\right]$$
$$=\frac{(1+i)^n-1}{d^{(p)}}$$
$$=\frac{i}{d^{(p)}}s_{\overline{n}|}$$

Relación entre valor presente y monto:

$$\ddot{s}_{\overline{n}|}^{(p)}=(1+i)^n\cdot\ddot{a}_{\overline{n}|}^{(p)}$$
$$=\frac{i}{d^{(p)}}(1+i)^n\frac{1-v^n}{i}$$
$$=\frac{i}{d^{(p)}}\frac{(1+i)^n-1}{i}$$
$$=\frac{i}{d^{(p)}}s_{\overline{n}|}$$

AMORTIZACIONES

Def. *La parte de la deuda no cubierta en una fecha dada se conoce como **saldo insoluto** o **capital insoluto** en la fecha.*

El capital insoluto justamente después de que se ha efectuado un pago es el valor presente de todos los pagos que aún faltan por hacerse.

La suma de todos los pagos al final de cada periodo es igual a la deuda original.

El encabezado de una tabla de amortización muestra los siguientes elementos:

- Período (1, 2, …, n)
- Capital insoluto al principio del período
- Interés vencido al final del período
- Pago (periódico, generalmente igual)
- Capital pagado al final del periodo
- Capital insoluto al final del perido

Ej. de tabla de amortización es:

Periodo	CapInsol PrincPeri	InterésVenc AlFinalPeri	Pago	CapitalPag AlFinalPeri	CapitalInsol AlFinalPeri
1	$a_{\overline{n}\vert i}$	$i\cdot a_{\overline{n}\vert i}=1-v^n$	1	v^n	$a_{\overline{n}\vert}-v^n=a_{\overline{n-1}\vert}$
2	$a_{\overline{n-1}\vert}$	$i\cdot a_{\overline{n-1}\vert}=1-v^{n-1}$	1	v^{n-1}	$a_{\overline{n-1}\vert}-v^{n-1}=a_{\overline{n-2}\vert}$
3	$a_{\overline{n-2}\vert}$	$i\cdot a_{\overline{n-2}\vert}=1-v^{n-2}$	1	v^{n-2}	$a_{\overline{n-2}\vert}-v^{n-2}=a_{\overline{n-3}\vert}$
t	$a_{\overline{n-t+1}\vert}$	$i\cdot a_{\overline{n-t+1}\vert}=1-v^{n-t+1}$	1	v^{n-t+1}	$a_{\overline{n-t+1}\vert}-v^{n-t+1}=a_{\overline{n-t}\vert}$
$n-1$	$a_{\overline{2}\vert}$	$i\cdot a_{\overline{2}\vert}=1-v^2$	1	v^2	$a_{\overline{2}\vert}-v^2=a_{\overline{1}\vert}$
n	$a_{\overline{1}\vert}$	$i\cdot a_{\overline{1}\vert}=1-v$	1	v	$a_{\overline{1}\vert}-v=0$
T		$n-a_{\overline{n}\vert}$	n	$a_{\overline{n}\vert}$	

Se observa que el capital total amortizado después del t-ésimo pago, es igual a $a_{\overline{n}|}-a_{\overline{n-t}|}$.

ANUALIDADES VITALICIAS

Def. *Se define el **rádix** como el número de vivos a la edad inicial.*

El radix, en general, es potencia de 10 y representa la base de la población hipotética cuyo número disminuye conforme aumenta la edad.

Denotamos la edad en la que el número de personas con vida que conforman la tabla de mortalidad es cero como ω. Para fines prácticos se utiliza $\omega=100$. Es decir, $l_\omega=0$.

Def. La esperanza de vida corta y completa, respectivamente, están dadas por

$$e_x=\frac{1}{l_x}\sum_{t=1}^{\omega-x-1}l_{x+t}=\sum_{t=1}^{\omega-x-1}{}_tp_x$$
$$\mathring{e}_x=\frac{1}{l_x}\int_0^\infty l_{x+t}\,dt=\int_0^\infty {}_tp_x\,dt$$

Se cumple:

$$\mathring{e}_x=e_x+\frac{1}{2}$$

la esperanza de vida es un caso especial de la anualidad vitalicia cuando la tasa de interés es cero.

Def. *Una **anualidad vitalicia** es aquella cuyo pago continúa mientras el rentista esté vivo.*

Def. *Un seguro **dotal puro** a n años es aquél en el cual la suma asegurada se paga sólo cuando el asegurado sobrevive a la edad $x+n$.*

La prima de un seguro dotal puro está dada por

$${}_nE_x=v^n\cdot\frac{l_{x+n}}{l_x}$$

Def. *Una **anualidad vitalicia ordinaria** es simplemente un conjunto de dotales puros, pagaderos al final de 1, 2, 3 años, terminando con la muerte del rentista.*

Designando por a_x la prima neta única (valor presente) de una anualidad vitalicia ordinaria, de \$1 por año, para una persona de edad x, se tiene

$$a_x={}_1E_x+{}_2E_x+\cdots+{}_{\omega-x}E_x$$
$$=(1+i)^{-1}\frac{l_{x+1}}{l_x}+(1+i)^{-2}\frac{l_{x+2}}{l_x}+\cdots+(1+i)^{-(\omega-x)}\frac{l_\omega}{l_x}$$
$$=\frac{(1+i)^{-1}l_{x+1}+(1+i)^{-2}l_{x+2}+\cdots+(1+i)^{-(\omega-x)}l_\omega}{l_x}$$

Para simplificar hacemos

$$v=(1+i)^{-1}$$

Multiplicando numerador y denominador

$$a_x=\frac{v^{x+1}l_{x+1}+v^{x+2}l_{x+2}+v^{x+3}l_{x+3}+\cdots+v^{\omega-1}l_{\omega-1}}{v^xl_x}$$

Por medio de conmutados:

$$D_x=v^xl_x\quad\&\quad N_x=D_x+D_{x+1}+D_{x+2}+\cdots+D_{\omega-1}$$

tenemos que

$$a_x=\frac{D_{x+1}+D_{x+2}+D_{x+3}+\cdots+D_{\omega-1}}{D_x}$$
$$=\frac{N_{x+1}}{D_x}$$

Una anualidad vitalicia anticipada de \$1 por año consiste de un pago inmediato de \$1 y de una anualidad vitalicia ordinaria de \$1.

Designemos con $\ddot{a}_x$ la PNU de una anualidad vitalicia anticipada de \$1 por año, para una persona de edad x, tenemos

$$\ddot{a}_x=1+a_x$$
$$=1+\frac{N_{x+1}}{Dx}$$
$$=1+\frac{D_{x+1}+D_{x+2}+\cdots+D_{\omega-1}}{D_x}$$
$$=\frac{D_x+D_{x+1}+D_{x+2}+\cdots+D_{\omega-1}}{D_x}$$

así

$$\ddot{a}_x=\frac{N_x}{D_x}$$

Una anualidad vitalicia ordinaria diferida k años es una secuencia de dotales puros, el primero pagadero al final de $k+1$ años,…, cesando los pagos con la muerte del rentista.

Designemos por ${}_{k|}a_x$ la PNU de una anualidad vitalicia ordinaria diferida k años, para una persona de edad x

$${}_{k|}a_x={}_{k+1}E_x+{}_{k+2}E_x+{}_{k+3}E_x+\cdots+{}_{\omega-x-1}E_x$$
$$=\frac{D_{x+k+1}+D_{x+k+2}+D_{x+k+3}+\cdots+D_{\omega-1}}{D_x}$$
$$=\frac{N_{x+k+1}}{D_x}$$

La PNU de una anualidad vitalicia anticipada diferida k años para una persona de edad x es

$${}_{k|}\ddot{a}_x=\frac{N_{x+k}}{D_x}$$

Lo importante de las anualidades anteriores es que son iguales a N_y/D_x

donde x es la edad del rentista cuando se compra la anualidad y y es su edad cuando se hace el primer pago.

Una anualidad contingente temporal difiere de una anualidad vitalicia en que termina después de un número especificado de pagos, aún cuando el rentista continúe con vida. Y la denotaremos:

$$a_{x:\overline{n}|} = a_x - {}_{n|}a_x$$
$$= \frac{N_{x+1}-N_{x+n+1}}{D_x}$$

Una anualidad contingente temporal diferida k años tiene PNU igual a

$${}_{k|}a_{x:\overline{n}|} = \frac{N_{x+k+1}-N_{x+k+n+1}}{D_x}$$

Una anualidad contingente anticipada tiene PNU igual a:

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \frac{N_x - N_{x+n}}{D_x}$$

También se cumple

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = 1 + a_{x:\overline{n-1}|}$$

Análogamente

$${}_{k|}\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \frac{N_{x+k}-N_{x+k+n}}{D_x}$$

Definimos los siguientes valores conmutados:

$$d_x = l_x - l_{x+1} \quad \& \quad C_x = v^{x+1}d_x$$
$$M_x = C_x + C_{x+1} + C_{x+2} + \cdots + C_{\omega-1}$$
$$R_x = \sum_{t=0}^{\omega-x-1}(t+1)\cdot C_{x+t} = \sum_{t=0}^{\omega-x-1} M_{x+t}$$

SEGUROS

Notación. El símbolo (x) denota la frase "una persona que está viva en edad x".

Una póliza de seguro de vida es un contrato entre una cía de seguros y una persona (el asegurado).

En este contrato

- El asegurado acuerda hacer uno o más pagos a la compañía.
- La compañía promete pagar, al recibo de pruebas de la muerte del asegurado, una suma fija, a los beneficiarios.

Los principales tipos de seguro de vida son:

- Seguro de vida entera,
- Seguro temporal a n años,
- Seguro dotal a n años.

Al dotal también se le conoce como dotal mixto; también existe el dotal puro conocido como seguro por sobrevivencia.

A_x será la PNU de un seguro de vida entera

$$A_x = \frac{vd_x + v^2 d_{x+1} + v^3 d_{x+2} + \cdots}{l_x}$$
$$= \frac{v^{x+1}d_x + v^{x+2}d_{x+1} + v^{x+3}d_{x+2} + \cdots}{v^x l_x}$$
$$= \frac{C_x + C_{x+1} + C_{x+2} + \cdots}{D_x}$$

finalmente

$$A_x = \frac{M_x}{D_x}$$

Se acostumbra el seguro ordinario de vida, seguro de vida pagos limitados a m años.

Designemos P_x prima neta anual de una póliza de seguro ordinario de vida de $1 emitida para una persona de edad x. Los pagos de primas es una anualidad vitalicia. Así

$$P_x \cdot \ddot{a}_x = A_x$$

y

$$P_x = \frac{A_x}{\ddot{a}_x} = \frac{M_x/D_x}{N_x/D_x}$$
$$= \frac{M_x}{N_x}$$

Designemos ${}_mP_x$ la PNA de un seguro de vida entera pagos limitados a m años de $1 para (x). Así

$${}_mP_x \cdot \ddot{a}_{x:\overline{m}|} = A_x$$

así

$${}_mP_x = \frac{A_x}{\ddot{a}_{x:\overline{m}|}} = \frac{M_x/D_x}{(N_x - N_{x+m})/D_x}$$
$$= \frac{M_x}{N_x - N_{x+m}}$$

El seguro temporal, designemos $A^1_{x:\overline{n}|}$ la PNU de un seguro temporal a n años para (x). Llegamos a

$$A^1_{x:\overline{n}|} = \frac{M_x - M_{x+n}}{D_x}$$

Designemos $P^1_{x:\overline{n}|}$ la PNA de un seguro temporal a n años de $1 para (x). Así

$$P^1_{x:\overline{n}|} \cdot \ddot{a}_{x:\overline{n}|} = A^1_{x:\overline{n}|}$$

y

$$P^1_{x:\overline{n}|} = \frac{A^1_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} = \frac{(M_x - M_{x+n})/D_x}{(N_x - N_{x+n})/D_x}$$
$$= \frac{M_x - M_{x+n}}{N_x - N_{x+n}}$$

Designemos ${}_mP^1_{x:\overline{n}|}$ la PNA de un seguro temporal a n años de $1 para (x), para ser pagada durante un periodo de $m < n$ años, o sea pagos limitados a m años, tendríamos

$${}_mP^1_{x:\overline{n}|} = \frac{M_x - M_{x+n}}{N_x - N_{x+m}}$$

Def. *En un **seguro dotal** se combinan beneficios de uno temporal y un dotal puro al termino de n años.*

Así

$$A_{x:\overline{n}|} = A^1_{x:\overline{n}|} + {}_nE_x$$
$$= \frac{M_x - M_{x+n}}{D_x} + \frac{D_{x+n}}{D_x}$$
$$= \frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{D_x}$$

Del mismo modo

$$P_{x:\overline{n}|} = \frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{N_x - N_{x+n}}$$

y

$${}_mP_{x:\overline{n}|} = \frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{N_x - N_{x+m}}$$

Def. *La PNU de un seguro temporal a 1 año, a la edad x, se conoce como **prima natural** a dicha edad.*

Por lo tanto, la prima natural para una póliza de 1, a la edad x es:

$$P^1_{x:\overline{1}|} = \frac{M_x - M_{x+1}}{N_x - N_{x+1}}$$
$$= \frac{M_x - M_{x+1}}{D_x}$$

En general, la PNN tiene la expresión:

$$\text{PNN} = \frac{c_0 M_x - c_1 M_{x+n} + c_2 D_{x+n}}{N_x - c_3 N_{x+n}}$$

Y se presentan los siguientes casos:

$$[c_0 \quad c_1 \quad c_2 \quad c_3] = \begin{cases} [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0] & \text{OrdinarioDeVida} \\ [1 \quad 0 \quad 0 \quad 1] & \text{VidaPagosLimitados} \\ [1 \quad 1 \quad 0 \quad 1] & \text{Temporal} \\ [1 \quad 1 \quad 1 \quad 1] & \text{Dotal} \end{cases}$$

Reservas

Cada sobrante de la prima anual sobre el costo del seguro en el año es colocada por la cía en un fondo de reserva, el cual gana intereses a la misma tasa que se utilizó al calcular la prima.

Def. *El fondo de reserva al final de cualquier año póliza se conoce como **reserva terminal** del año póliza.*

Def. *La reserva terminal menos un cargo nominal para gastos se conoce como **valor de rescate de la póliza**.*

La reserva se puede calcular por:

$$\left\{\begin{matrix}\text{Reserva Terminal al}\\ \text{final del } r\text{-ésimo año póliza}\end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix}\text{Valor Presente de}\\ \text{todas las primas futuras}\end{matrix}\right\}$$
$$= \left\{\begin{matrix}\text{Valor Presente de}\\ \text{Beneficios Futuros}\end{matrix}\right\}$$

Designando ${}_rV$ la reserva terminal al final del r-ésimo año de una póliza de seguro ordinario de vida de 1, para (x). Así tenemos:

$${}_rV + P_x \cdot \ddot{a}_{x+r} = A_{x+r}$$

y

$${}_rV = A_{x+r} - P_x \cdot \ddot{a}_{x+r}$$
$$= \frac{M_{x+r}}{D_{x+r}} - \frac{M_x}{N_x}\cdot\frac{N_{x+r}}{D_{x+r}}$$

Este último método para el cálculo de la reserva es conocido como método *prospectivo*, y está basado en obligaciones y beneficios futuros; el otro método de cálculo de la reserva es el *retrospectivo*.

BENEFICIOS VARIABLES

Anualidad Crecientes

Def. *Una **anualidad creciente** es aquella que se paga la cantidad de $1 a la persona que sobrevive a la edad $x+1$, $2 a los que sobreviven a edad $x+2$, $3 a los que llegan a $x+3$ y así sucesivamente.*

Deduciendo la PNU de esta anualidad, tenemos:

$$l_x(Ia)_x = vl_{x+1} + v^2(2l_{x+2}) + v^3(3l_{x+3}) + \cdots$$
$$(Ia)_x = \frac{v^{x+1}l_{x+1} + v^{x+2}(2l_{x+2}) + v^{x+3}(3l_{x+3}) + \cdots}{v^x l_x}$$
$$= \frac{D_{x+1} + 2D_{x+2} + 3D_{x+3} + \cdots}{D_x}$$
$$= \frac{1}{D_x}\sum_{t=1}^{\infty} tD_{x+t}$$

De aquí deducimos otro valor

$$\sum_{t=1}^{\infty} tD_{x+t} = N_{x+1} + N_{x+2} + N_{x+3} + \cdots$$
$$= \sum_{t=1}^{\infty} N_{x+t}$$

Y queda definido el siguiente valor conmutado:

$$S_x = \sum_{t=0}^{\infty}(t+1)D_{x+t}$$
$$= \sum_{t=0}^{\infty} N_{x+t}$$

Por tanto, la PNU de una anualidad creciente es:

$$(Ia)_x = \frac{S_{x+1}}{D_x}$$

Seguros Crecientes

La PNU de un Seguro, emitido a edad x que paga una unidad de suma asegura si la muerte ocurre en el primer año, 2 si la muerte ocurre en el segundo, 3 de ocurrir en el tercero y así sucesivamente, se denota por $(IA)_x$ y

$$(IA)_x = \frac{vd_x + 2v^2 d_{x+1} + 3v^3 d_{x+2} + \cdots + (\omega - x - 1)v^{\omega-x-1}d_{\omega-2} + (\omega - x)v^{\omega-1}d_{\omega-1}}{l_x}$$
$$= \frac{v^{x+1}d_x + 2v^{x+2}d_{x+1} + 3v^{x+3}d_{x+2} + \cdots + (\omega - x)v^{\omega}d_{\omega-1}}{v^x l_x}$$
$$= \frac{C_x + 2C_{x+1} + 3C_{x+2} + \cdots + (\omega - x - 1)C_{\omega-2} + (\omega - x)C_{\omega-1}}{D_x}$$
$$= \frac{\sum_{t=0}^{\omega-x-1}(t+1)C_{x+t}}{D_x}$$
$$= \frac{\sum_{t=0}^{\omega-x-1} M_{x+t}}{D_x}$$
$$= \frac{R_x}{D_x}$$

por lo tanto

$$(IA)_x = \frac{R_x}{D_x}$$

o, también

$$(IA)_x = \sum_{t=0}^{\omega-x-1} {}_{t|}A_x$$

y un seguro creciente temporal tiene PNU dada por

$$(IA)^1_{x:\overline{n}|} = \frac{R_x - R_{x+n} - nM_{x+n}}{D_x}$$

La PNU se un seguro en el que la SA crezca durante n años, para después mantenerse constante de ahí en adelante, se denota por $(I_{\overline{n}|}A)_x$, y

$$(I_{\overline{n}|}A)_x = \frac{1}{D_x}\left[\sum_{t=0}^{\omega-x-1}(t+1)C_{x+t} - \sum_{t=0}^{\omega-x-n-1}(t+1)C_{x+n+t}\right]$$
$$= \frac{R_x - R_{x+n}}{D_x}$$

de lo anterior, también se tiene

$$(IA)^1_{x:\overline{n}|} = (I_{\overline{n}|}A)_x - n\,{}_{n|}A_x$$

Seguros decrecientes

Es aquél que inicia con una SA de n unidades si la muerte ocurre en el primer año, para disminuir a $n-1$ pagaderos si el fallecimiento es en el transcurso del segundo año, $n-2$ en el tercero y así sucesivamente, hasta que la SA es unitaria en el caso de que la muerte suceda en el transcurso del n-ésimo año. Su valor presente se denota $(DA)^1_{x:\overline{n}|}$ y está dado por

$$(DA)^1_{x:\overline{n}|} = \frac{1}{D_x}\left[nC_x + (n-1)C_{x+1} + (n-2)C_{x+2} + \cdots + 2C_{x+n-2} + C_{x+n-1}\right]$$
$$= \frac{1}{D_x}\left\{\begin{matrix} n\cdot(C_x + C_{x+1} + C_{x+2} + \cdots + C_{x+n-1}) \\ -\left[C_{x+1} + 2C_{x+2} + \cdots + (n-1)C_{x+n-1}\right]\end{matrix}\right\}$$
$$= \frac{1}{D_x}\left[n\cdot(M_x - M_{x+n}) - (R_{x+1} - R_{x+n+1} - nM_{x+n})\right]$$
$$\therefore$$
$$(DA)^1_{x:\overline{n}|} = \frac{1}{D_x}\left[nM_x - (R_{x+1} - R_{x+n+1})\right]$$

es decir,

$$(DA)^1_{x:\overline{n}|} = n\cdot A_x - {}_{1|}(I_{\overline{n}|}A)_x$$
$$(DA)^1_{x:\overline{n}|} = \sum_{t=1}^{n} A^1_{x:\overline{t}|}$$

TABLA DE DECREMENTOS

Denotemos:

$l_x^{(T)}$ el número de vivos a la edad de x en el grupo de personas sujetos a m causas de decrementos $(1),(2),\cdots,(m)$;

$d_x^{(k)}$ es el número de decrementos de la causa k entre la edad x y $x+1$;

$d_x^{(T)}$ es el número total de decrementos de todas las causas entre la edad x y $x+1$, de modo que

$$d_x^{(T)} = \sum_{k=1}^{m} d_x^{(k)}$$

$$l_x^{(T)} - d_x^{(T)} = l_{x+1}^{(T)}$$

y

$q_x^{(k)}$ es la probabilidad de que (x) deje el grupo de vivos dentro del año resultado de la causa k:

$$q_x^{(k)} = \frac{d_x^{(k)}}{l_x^{(T)}}$$

$q_x^{(T)}$ es la probabilidad de que (x) deje el grupo de vivos en el año por cualquier causa:

$$q_x^{(T)} = \frac{d_x^{(T)}}{l_x^{(T)}} = \sum_{k=1}^{m} q_x^{(k)} \quad .$$

$p_x^{(T)}$ es la probabilidad de que (x) se mantenga en el grupo de personas por lo menos un año

$$p_x^{(T)} = 1 - q_x^{(T)} = \frac{l_{x+1}^{(T)}}{l_x^{(T)}}$$

del mismo modo

$$ {}_n p_x^{(T)} = \frac{l_{x+n}^{(T)}}{l_x^{(T)}}$$

y

$$ {}_n q_x^{(T)} = 1 - {}_n p_x^{(T)}$$

Conociendo las $q_x^{(k)}$ para todo k y asumiendo un radix, se pueden obtener los valores de $d_x^{(k)}$, $d_x^{(T)}$ y $l_x^{(T)}$.

Ej. De causas de decremento en un grupo de empleados dentro de una empresa son: muerte, invalidez,, separación y despido.

Def. *La **tasa central de decremento** de todas las causas a edad x se define como*

$$m_x^{(T)} = \frac{d_x^{(T)}}{L_x^{(T)}}$$

donde

$$L_x^{(T)} = \int_0^1 l_{x+t}^{(T)}\,dt \quad .$$

La tasa central de decremento por la causa (k) es

$$m_x^{(k)} = \frac{d_x^{(k)}}{L_x^{(T)}} \quad .$$

Así

$$\sum_{k=1}^{m} m_x^{(k)} = m_x^{(T)} .$$

También se supone

$$l_{x+t}^{(T)} \approx l_x^{(T)} - t d_x^{(T)},\ t \in \langle 0,1 \rangle$$

así

$$L_x^{(T)} = \int_0^1 l_{x+t}^{(T)}\,dt \approx \int_0^1 \left(l_x^{(T)} - t d_x^{(T)} \right) dt$$
$$= l_x^{(T)} - \frac{1}{2} d_x^{(T)} .$$

Entonces se tiene

$$m_x^{(k)} \approx \frac{d_x^{(k)}}{l_x^{(T)} - \frac{1}{2} q_x^{(T)}} .$$

de lo anterior se expresa $m_x^{(k)}$ en términos de probabilidades de decrementos como

$$m_x^{(k)} \approx \frac{q_x^{(k)}}{1 - \frac{1}{2} q_x^{(T)}} .$$

También se deduce que

$$l_x^{(T)} \approx L_x^{(T)} + \frac{1}{2} d_x^{(T)}$$

Entonces

$$q_x^{(k)} \approx \frac{d_x^{(k)}}{L_x^{(T)} + \frac{1}{2} d_x^{(T)}} = \frac{m_x^{(k)}}{1 + \frac{1}{2} m_x^{(T)}}$$

y

$$p_x^{(T)} \approx \frac{1 - \frac{1}{2} m_x^{(T)}}{1 + \frac{1}{2} m_x^{(T)}} .$$

Se concluye

$$d_x^{(k)} = d_x^{(T)} \cdot \frac{m_x^{(k)}}{m_x^{(T)}} .$$

EDADES FRACCIONARIAS

Sea $t \in \langle 0,1 \rangle$, entonces $x+t$ representará una edad fraccionaria.

Y

$$ {}_t p_x = \frac{l_{x+t}}{l_x}$$

Se sabe que l_x es una función decreciente. Y suponiendo que en el intervalo de tiempo t ocurre un número de fallecimientos proporcional a su tamaño, entonces

$$l_{x+t} = l_x - t \cdot d_x \quad .$$

Entonces

$$ {}_t p_x = \frac{l_x - t \cdot d_x}{l_x}$$
$$= 1 - t \cdot q_x$$

y

$$ {}_t q_x = t \cdot q_x$$

Otra forma de obtener probabilidades de muerte y supervivencia es utilizando la hipótesis de Balduci, llegando a la siguiente expresión:

$$ {}_{1-t} q_{x+t} = (1-t) q_x$$

VIDAS CONJUNTAS

La probabilidad de que el status de vidas conjuntas $(x_1 x_2 \cdots x_m)$ viva por n años se denota por ${}_n p_{x_1 x_2 \cdots x_m}$, y puesto que está compuesto de las probabilidades individuales, se tiene

$$ {}_n p_{x_1 x_2 \cdots x_m} = {}_n p_{x_1} \cdot {}_n p_{x_2} \cdots {}_n p_{x_m}$$

y

$$ {}_n q_{x_1 x_2 \cdots x_m} = 1 - {}_n p_{x_1 x_2 \cdots x_m}$$

La probabilidad de que el status muera en el año $n+1$ es

$$ {}_{n|} q_{x_1 x_2 \cdots x_m} = {}_n p_{x_1 x_2 \cdots x_m} - {}_{n+1} p_{x_1 x_2 \cdots x_m} .$$

El valor presente de la anualidad que paga \$1 al final de año en que (x_1), (x_2), ..., (x_m) están todos vivos, esto es, el status $(x_1 x_2 \cdots x_m)$ está vivo, es

$$a_{x_1 x_2 \cdots x_m} = \sum_{t=1}^{\infty} v^t \, {}_t p_{x_1 x_2 \cdots x_m} .$$

El valor presente de un seguro de vida conjunta que paga \$1 al final del año en que el status $(x_1 x_2 \cdots x_m)$ muere es

$$A_{x_1 x_2 \cdots x_m} = \sum_{t=0}^{\infty} v^{t+1} \, {}_{t|} q_{x_1 x_2 \cdots x_m} .$$

Otras funciones vida conjunta se formulan reemplazando la probabilidad de vida individual por la de vida conjunta. Por ejemplo

$$e_{xy} = \sum_{t=1}^{\infty} {}_t p_{xy}$$

STATUS DE ÚLTIMO SOBREVIVIENTE

El status de último sobreviviente lo denotamos $\left(\overline{x_1 x_2 \cdots x_m}\right)$.

Y ${}_n p_{\overline{x_1 x_2 \cdots x_m}}$ denota la probabilidad de que el status permanezca vivo los próximos n años; este valor es el complemento de la probabilidad de que todos mueran en n años.

$$\begin{aligned}
{}_n p_{\overline{x_1 x_2 \cdots x_m}} &= 1 - \left(1 - {}_n p_{x_1}\right)\left(1 - {}_n p_{x_2}\right) \cdots \left(1 - {}_n p_{x_m}\right) \\
&= \left({}_n p_{x_1} + {}_n p_{x_2} + \cdots + {}_n p_{x_m} \right) \\
&\quad - \left({}_n p_{x_1 x_2} + {}_n p_{x_1 x_3} + \cdots + {}_n p_{x_{m-1} x_m} \right) \\
&\quad + \left({}_n p_{x_1 x_2 x_3} + {}_n p_{x_1 x_2 x_4} + \cdots + {}_n p_{x_{m-2} x_{m-1} x_m} \right) \\
&\quad - \left({}_n p_{x_1 x_2 x_3 x_4} + \cdots + {}_n p_{x_{m-3} x_{m-2} x_{m-1} x_m} \right) \\
&\quad + \cdots \\
&\quad (-1)^{m+1} \, {}_n p_{x_1 x_2 \cdots x_m}
\end{aligned}$$

Esta expresión se puede escribir como:

$$\begin{aligned}
{}_n p_{\overline{x_1 x_2 \cdots x_n}} &= \sum {}_n p_{x_1} - \sum {}_n p_{x_1 x_2} + \sum {}_n p_{x_1 x_2 x_3} \\
&\quad - \sum {}_n p_{x_1 x_2 x_3 x_4} + \cdots + (-1)^{m+1} \, {}_n p_{x_1 x_2 \cdots x_m}
\end{aligned}$$

y la probabilidad de que el status muera es

$$ {}_n q_{\overline{x_1 x_2 \cdots x_m}} = 1 - {}_n p_{\overline{x_1 x_2 \cdots x_m}}$$

La probabilidad de que $\left(\overline{x_1 x_2 \cdots x_m}\right)$ muera en el $(n+1)$-ésimo año está dado por

$$ {}_{n|} q_{\overline{x_1 x_2 \cdots x_m}} = {}_n p_{\overline{x_1 x_2 \cdots x_m}} - {}_{n+1} p_{\overline{x_1 x_2 \cdots x_m}}$$

Las funciones más comunes de último sobreviviente son las que involucran sólo dos o tres vidas. En estos casos, tenemos

$$ {}_n p_{\overline{xy}} = \sum {}_n p_x - {}_n p_{xy} = {}_n p_x + {}_n p_y - {}_n p_{xy}$$

$$ {}_n p_{\overline{xyz}} = \sum {}_n p_x - \sum {}_n p_{xy} + {}_n p_{xyz}$$

Otras funciones se pueden expresar en modo similar

$$\begin{aligned}
{}_n q_{\overline{xy}} &= 1 - {}_n p_{\overline{xy}} = 1 - \left({}_n p_x + {}_n p_y - {}_n p_{xy} \right) \\
&= {}_n q_x + {}_n q_y - {}_n q_{xy} \\
&= \sum {}_n q_x - {}_n q_{xy}
\end{aligned}$$

también

$$\begin{aligned}
{}_{n|} q_{\overline{xyz}} &= {}_n p_{\overline{xyz}} - {}_{n+1} p_{\overline{xyz}} \\
&= \left({}_n p_x + {}_n p_y + {}_n p_z - {}_n p_{xy} - {}_n p_{xz} - {}_n p_{yz} + {}_n p_{xyz} \right) \\
&\quad - \left({}_{n+1} p_x + {}_{n+1} p_y + {}_{n+1} p_z - {}_{n+1} p_{xy} - {}_{n+1} p_{xz} - {}_{n+1} p_{yz} + {}_{n+1} p_{xyz} \right) \\
&= {}_{n|} q_x + {}_{n|} q_y + {}_{n|} q_z - {}_{n|} q_{xy} - {}_{n|} q_{xz} - {}_{n|} q_{yz} + {}_{n|} q_{xyz} \\
&= \sum {}_{n|} q_x - \sum {}_{n|} q_{xy} + \sum {}_{n|} q_{xyz}
\end{aligned}$$

también

$$\begin{aligned}
a_{\overline{xyz}} &= \sum_{t=1}^{\infty} v^t \, {}_t p_{\overline{xyz}} \\
&= \sum_{t=1}^{\infty} v^t \left({}_t p_x + {}_t p_y + {}_t p_z - {}_t p_{xy} - {}_t p_{xz} - {}_t p_{yz} + {}_t p_{xyz} \right) \\
&= a_x + a_y + a_z - a_{xy} - a_{xz} - a_{yz} + a_{xyz} \\
&= \sum a_x - \sum a_{xy} + a_{xyz}
\end{aligned}$$

REASEGURO

Def. *El **coaseguro** es la participación de dos o más instituciones de seguros en un mismo riesgo en virtud de dos contratos directos realizados por cada una de ellas con el asegurado.*

Def. *El **reaseguro** es la técnica en la que la cartera de la compañía de seguros se vuelve homogénea en la que consiste en una operación concertada por la compañía de seguros en la que transfiere parte de los riesgos asumidos o parte de los siniestros a pagar, abonando para ellos una prima de reaseguro.*

OTROS

Distribución de días en el año					
Ene-31	Feb-28	Mar-31	Abr-30	May-31	Jun-30
Jul-31	Ago-31	Sep-30	Oct-31	Nov-30	Dic-31

Un año es bisiesto si es múltiplo de 4 (por ejemplo 1984). Sin embargo, los años múltiplos de 100 sólo son bisiestos cuando a su vez son múltiplos de 400(por ejemplo, 1800 no es bisiesto, mientras que 2000 si lo es).

ABREVIATURAS

PNU. Prima Neta Única
PNN. Prima Neta Nivelada
PNA. Prima Neta Anual
SA. Suma Asegurada

BIBLIOGRAFÍA

FRANK AYRES, JR., *Matemáticas Financieras*, McGraw-Hill

MARIO ARRIAGA PARRA, JOSÉ ANTONIO SÁNCHEZ CHIBRÁS, *Elementos de Cálculo Actuarial*, UNAM

CHESTER WALLACE JORDAN JR., *Life Contingencies*, The Society of Actuaries.

VICTOR MANUEL PASTOR CORNEJO, *Matemáticas Financieras*, SEP